

Øving 4, TFY4210 Anvendt Kvantemekanikk, Vår 2006

Oppgave 1

Vi kvantiserer det elektromagnetiske feltet ved å sette

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]$$

med kanoniske kommuteringsregler for kreasjons- og annihilasjons-operatorene, og periodiske grensebetingelser på normeringsvolumet V . De elektriske og magnetiske feltene er gitt ved $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ og $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

a) Vis at alle operatorene \mathbf{A} , \mathbf{E} , og \mathbf{B} er hermiteske.

b) Vi kan definere Fourier-komponentene $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ til vektorpotensialet ved

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}.$$

Skriv ned et eksplisitt uttrykk for $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ av vektorpotensialet, og vis at Fourier-komponentene kommuterer innbyrdes. For å vise dette, ta to vilkårlige enhetsvektorer \mathbf{e}_1 og \mathbf{e}_2 , og vis at for to vilkårlige bølgetallsvektorer \mathbf{k} og \mathbf{k}' er

$$[\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}'}] = 0.$$

c) Fourier-komponentene $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ og $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ defineres på samme måte som for vektorpotensialet. Sjekk kommutatorene

$$[\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}'}],$$

og

$$[\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}'}].$$

Uten å regne, kan man si noe om

$$[\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}}, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}'}]?$$

Er det mulig å lage et elektromagnetisk felt innefor V med vilkårlig stor nøyaktig, altså slik at både det elektriske feltet og det magnetiske feltet er spesifisert med vilkårlig stor nøyaktig overalt i volumet?