Øving 7, TFY4210 Anvendt Kvantemekanikk, Vår 2006

Oppgave 1
La Hamilton-operatoren for et system være gitt ved $H = H_0 + V$, der H_0 er slik at problemet med $V = 0$ er eksakt løsbart, og V er en perturbasjon. Evolusjonsoperatoren for en tilstand $|\psi\rangle$ er gitt ved

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)}\ e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\ |\psi(t_0)\rangle = U(t,t_0)\ |\psi(t_0)\rangle.$$

Bevegelsesligningen for evolusjonsoperatoren $U(t,t_0)$ i vekselvirkningsbildet, er gitt ved

$$\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{V}(t)\ U(t,t_0),$$

der tidsavhengigheten av en operator $\hat{O}$ i vekselvirkningsbildet er gitt ved

$$\hat{V}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\ \hat{V}\ e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}.$$

Legg merke til hvordan dette reduserer seg til Heisenberg bildet når $V = 0$.
Vis at løsningen til bevegelsesligningen for $U(t,t_0)$ er gitt ved

$$U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 .... \int_{t_0}^{t} dt_n \hat{V}(t_1)...\hat{V}(t_1).$$

Oppgave 2
I WKB approximasjonen for løsningen $\psi(x)$ til Schrödinger ligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

antar vi at

$$\psi(x) = Ae^{\frac{iS(x)}{\hbar}},$$

og finner følgende ligning for $S(x)$:

$$\left(S^{'}(x)\right)^2 - 2m(E - V(x)) - i\hbar S^{''}(x) = 0; E > V(x),$$

der $S^{'}(x) = dS(x)/dx$ og $S^{''}(x) = d^2S(x)/dx^2$. Sett så

$$S(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + \frac{\hbar^2}{2}S_2(x) + ...,$$

og finn et uttrykk for $S_2(x)$ ved hjelp av $m, E, V(x)$.