Eksamen i fag TFY4230
Statistisk fysikk den 2/12-04.

Forslag til Løsning.

Oppgave 1.

a) Energien til systemet er $H = -h\sum_{i=1}^{N} s_i + U$ der U er uavhengig av h. Partisjonsfunksjonen er

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta H}$$

Ved å derivere Z finner en så

$$Z' = \frac{\partial Z}{\partial h} = \sum \beta \Big(\sum_{i=1}^{N} s_i\Big) e^{-\beta H} = N\beta \sum s_1 e^{-\beta H}$$

$$= N\beta \langle s_1 \rangle Z = N\beta Z m$$

$$m = \frac{1}{N\beta}\frac{Z'}{Z}$$

$$Z'' = \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} = \sum \beta^2 \Big(\sum_{i=1}^{N} s_i \sum_{j=1}^{N} s_j\Big) e^{-\beta H} = \beta^2 \sum_{i,j=1}^{N} \langle s_i s_j \rangle Z.$$

Ved derivering av m og innsetting for Z' og Z'' finner en

$$\frac{\partial m}{\partial h} = \frac{1}{N\beta}\left\{\frac{Z''}{Z} - \left(\frac{Z'}{Z}\right)^2\right\} = \frac{\beta}{N}\sum_{ij} \langle s_i s_j \rangle - N\beta m^2$$

$$= \frac{\beta}{N}\sum_{ij}\left(\langle s_i s_j\rangle - m^2\right) = \frac{\beta}{N}\sum_{ij}\Gamma_{ij} = \underline{\beta \sum_{j} \Gamma_{ij}}$$

som gir fluktuasjonsteoremet med størrelsen $\underline{a = \beta}$. Her er det benyttet at Γ_{ij} avhenger bare av relativavstanden $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ (for store N). En trenger da bare å summere over j. Summering over i gir da bare en enkel faktor N.

b) Har at $\Gamma_{ii} = \langle s_i^2 \rangle - m^2 = \langle s_i^2 \rangle = \langle (\pm 1)^2 \rangle = 1$ da $m = 0$ for $h = 0$. Følgelig må en ha at

$$\Gamma_{ii} = c u^0 = \underline{\underline{c = 1.}}$$

Derivering av det gitte uttrykket for m gir ($x = \beta h$)

$$\frac{\partial m}{\partial h} = \beta \frac{\partial m}{\partial x} = \beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sinh x}{(\sinh^2 x + e^{-4\beta J})^{1/2}} =$$

$$\beta\left[\frac{\cosh x}{(\sinh^2 x + e^{-4\beta J})^{1/2}} - \frac{\sinh^2 x \cosh x}{(\sinh^2 x + e^{-4\beta J})^{3/2}}\right] \xrightarrow[x \to 0]{} \underline{\beta e^{2\beta J}}$$

Fluktuasjonsteoremet gir så

$$\frac{\partial m}{\partial h} = \beta \sum_{j} \Gamma_{ij} = \beta \sum_{n} u^{|n|} = \beta\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} u^n\Big) =$$

$$\beta\Big(1 + 2\frac{u}{1-u}\Big) = \beta \frac{1+u}{1-u}$$

Likhet betyr følgelig

$$\frac{1+u}{1-u} = e^{2\beta J}$$

$$1 + u = (1-u) e^{2\beta J}$$

$$(e^{2\beta J} + 1) u = e^{2\beta J} - 1$$

$$u = \frac{e^{2\beta J} - 1}{e^{2\beta J} + 1} = \frac{e^{\beta J} - e^{-\beta J}}{e^{\beta J} + e^{-\beta J}} = \underline{\underline{\tanh(\beta J)}}$$

Oppgave 2

a) Når $T \to 0$ vil systemet være i grunntilstanden slik at ($n=-l$)

$$U = \langle E_n \rangle = E_{-l} = \underline{\underline{-lh}}.$$

Når $T \to \infty$ vil det være samme sannsynlighet for å være i alle tilstandene. Med samme avstand h mellom påfølgende tilstander blir midlere energi det samme som middelverdien av laveste og høyeste energi

$$U = \tfrac{1}{2}(E_{-l} + E_l) = \underline{\underline{0}}$$

Ved $T=0$ er sannsynligheten for å være i grunntilstanden $W_{-l} = 1$ slik at entropien blir

$$S_0 = -k\, w_{-l} \ln w_{-l} = \underline{\underline{0}}$$

Når $T \to \infty$ er det samme sannsynlighet for å være i alle tilstandene slik at $w_n = 1/N$, og entropien blir ($N = 2l+1$).

$$S_\infty = -k \sum_n w_n \ln w_n = k \sum_n \frac{1}{N} \ln N = \underline{\underline{k \ln N}}$$

Siden $S_0 = 0$ er endelig må spesifikk varme gå mot null når $T \to 0$ ($S = \int (C/T)\,dT$). Dvs

$$\underline{\underline{C=0}} \quad \text{ved} \quad T=0$$

Siden U går mot en endelig verdi ($U=0$) når $T \to \infty$ må en ha

$$\underline{\underline{C=0}} \quad \text{når } T \to \infty.$$

b) Partisjonsfunksjonen blir

$$Z_1 = \sum_{n=-l}^{l} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=-l}^{l} e^{-\beta h n} = \frac{e^{\beta h l} - e^{-\beta h (l+1)}}{1 - e^{-\beta h}}$$

$$= \frac{e^{\beta h (l+\frac{1}{2})} - e^{-\beta h (l+\frac{1}{2})}}{e^{\beta h \frac{1}{2}} - e^{-\beta h \frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{\sinh[(l+\frac{1}{2})\beta h]}{\sinh(\frac{1}{2}\beta h)}}}$$

Indre energi for $l = 3/2$ og $\beta h = \ln 2$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_1 = -\frac{\partial}{\partial\beta}\Big\{ \ln \sinh[(l+\tfrac{1}{2})\beta h] - \ln[\sinh(\tfrac{1}{2}\beta h)] \Big\} = \underline{\underline{-(l+\tfrac{1}{2})h \frac{\cosh[(l+\frac{1}{2})\beta h]}{\sinh[(l+\frac{1}{2})\beta h]}}}$$

$$\underline{\underline{+ \tfrac{1}{2}h \frac{\cosh(\frac{1}{2}\beta h)}{\sinh(\frac{1}{2}\beta h)}}} = -(l+\tfrac{1}{2})h \frac{e^{(2l+1)\beta h}+1}{e^{(2l+1)\beta h}-1}$$

$$+ \tfrac{1}{2}h \frac{e^{\beta h}+1}{e^{\beta h}-1} = -2h \frac{2^4+1}{2^4-1} + \tfrac{1}{2}h \frac{2+1}{2-1}$$

$$= \left(-\frac{34}{15} + \frac{3}{2}\right)h = \frac{-68+45}{30}h = \underline{\underline{-\frac{23}{30}h}} = \underline{\underline{-0{,}77\,h}}$$

Oppgave 3.

a) Energien ε avhenger bare av størrelsen til k-vektoren og da $\vec{n}$-vektoren. Siden $n_i > 0$ $(i = x, y, z)$ trenger en volumet av kuleskall i 1. oktant. Dette dekker 1/8 av en kuleflate slik at

$$d\vec{n} = \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn$$

Videre ~~er~~

$$k = \frac{\pi}{L} n \quad , \quad n = \frac{L}{\pi} k , \quad dn = \frac{L}{\pi} dk$$

som gir

$$d\vec{n} = 4\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2 dk = 4\pi \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \frac{dk}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

Sammenhengen

$$\varepsilon = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}$$

gir så

$$\frac{d\varepsilon}{dk} = \frac{\hbar^2}{m} k$$

slik at

$$d\vec{n} = 4\pi \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \frac{m}{\hbar^2 k} d\varepsilon = 4\pi \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2} \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} d\varepsilon$$

$$= \underline{V \cdot 2\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}$$

der $h = 2\pi\hbar$. Med degenerasjon g_d er det et antall g_d kvantetilstander pr. enhetsvolum i $\vec{n}$-rommet. Tilstandstettheten blir følgelig $(g_d\, d\vec{n} = g(\varepsilon)\, d\varepsilon)$

$$g(\varepsilon) = \underline{\underline{V\, 2\pi g_d \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}}}$$

b) For rent Si vil tettheten av ladninger i ledningsbåndet ~~være~~ lik tettheten av hull i valensbåndet. Følgelig fra pn-relasjonen

$$np = n^2 = n_0^2 e^{-\beta(\varepsilon_c - \varepsilon_v)}$$

$$\frac{n}{n_0} = \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{1}{2}\beta(\varepsilon_c - \varepsilon_v)} = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}14 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 293\,\mathrm{K}}\right)$$

$$= \exp(-22{,}55) = \underline{\underline{1{,}60 \cdot 10^{-10}}}$$

Tettheten av hull i akseptornivåene er tettheten av nivåer minus tettheten av elektroner i disse slik at

$$p_a = p_{0a}\left(1 - \frac{e^{\beta(\mu - \varepsilon_a)}}{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_a)}}\right) = p_{0a} \frac{1}{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_a)}}$$

som gir

$$\left(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_a)}\right) p = p_{0a}$$

$$e^{\beta(\mu - \varepsilon_a)} = \frac{p_{0a} - p_a}{p_a}$$

$$\mu - \varepsilon_a = kT \ln\left(\frac{1 - p_a/p_{0a}}{p_a/p_{0a}}\right) = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 293\,\mathrm{J} \ln\left(\frac{0{,}75}{0{,}25}\right)$$

$$= \underline{\underline{4{,}44 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{J}}} = \underline{\underline{27{,}8\,\mathrm{meV}}}$$