LØSNINGSFORSLAG.

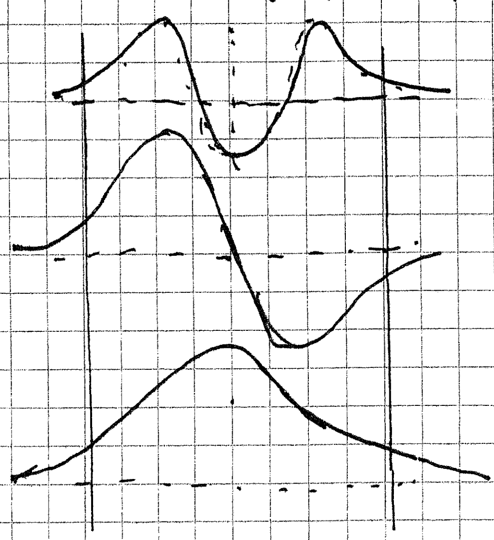
OPPGAVE 1

a) b) Bølgefunksjonen i 1(a) er en løsning for potensialet nederst på figuren. En systematisk måte å se på mulige bølgefunksjoner er å se på de to grensetilfellene at

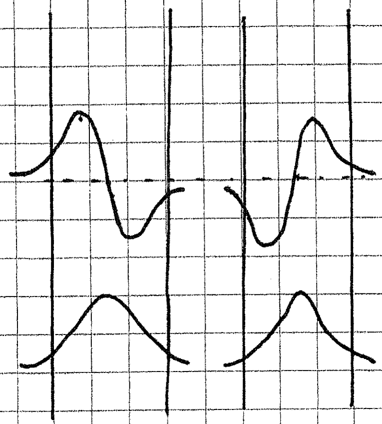
i) barrieren i midten går mot null

ii) barrieren i midten blir stor

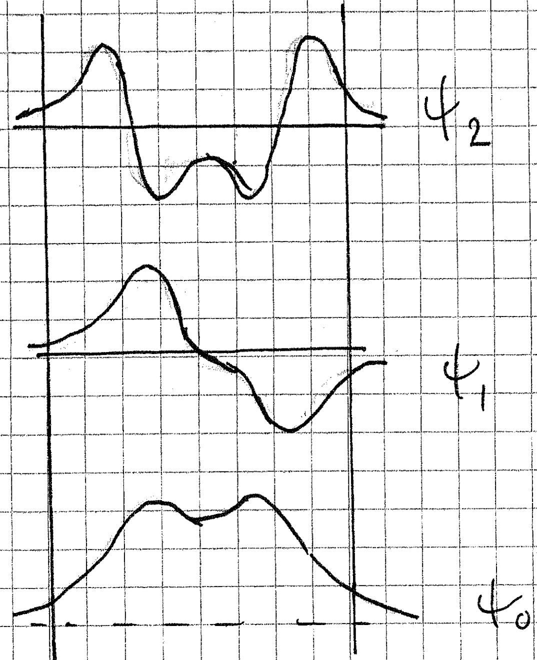
i) De tre laveste energitilstandene tilsvarer bølgefunksjonene



ii)



Symmetriske og antisymmetriske kombinasjoner av disse for en moderat barriere i midten gir følgende bølgefunksjoner for de tre laveste tilstandene



Dette gir

$$\Delta E_0 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} V_0 \cos(\pi x/a) \cdot \cos^2 \pi x/a \, dx \Big/ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos^2 \pi x/a \, dx$$

$$= V_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \xi \, d\xi \Big/ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \xi \, d\xi$$

$$= V_0 \cdot \frac{8}{3\pi}$$

Grunntilstanden:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} + V_0 \frac{8}{3\pi}$$

Laveste eksiterte tilstand, E_1

$$\Delta E_1 = \int_{-a/2}^{a/2} V_0 \cos \pi x/a \cdot \sin^2 2\pi x/a \, dx \Big/ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sin^2 2\pi x/a \, dx$$

$$= V_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \xi \cdot \sin^2 2\xi \, d\xi \Big/ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^2 2\xi \, d\xi$$

$$= 4V_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^3 \xi - \cos^5 \xi) \, d\xi \Big/ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^2 2\xi \, d\xi$$

$$= V_0 \frac{32}{45\pi}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4\pi^2}{a^2} + V_0 \frac{32}{45\pi}.$$

c) Schrodingerligningen: for $V = \text{konst} = 0$
inne i brønnen.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

Denne har to typer løsninger; symmetriske og antisymmetriske. Grensebetingelsen er
$\psi = 0$ for $x = \pm \frac{a}{2}$.

Dette gir $\psi_s = A\cos(2n+1)\pi x/a$

$$\psi_a = B \cdot \sin 2n \cdot \pi x/a$$

Laveste tilstand:

$$\psi_0 = A \cdot \cos \pi x/a$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}$$

Nest laveste:

$$\psi_1 = B \cdot \sin 2\pi x/a$$

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{4\pi^2}{a^2}$$

Som en tiemærmet Energi kan vi beregne:

$$E = \langle \psi_0 | H_0 + \Delta H | \psi_0 \rangle$$

der $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$, $\Delta H = V$.

Oppgave 2.

a)

Ut fra symmetriargumenter ser vi med en gang at $\langle x \rangle = 0$; $\langle p \rangle = 0$

Sannsynlighetsfordelingen $P = |\Psi|^2$ er symmetrisk , x og p er antisymmetriske. Vi behøver derfor bare beregne $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$

Vi starter med grunntilstanden

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega_0^2 x^2}{2\hbar}}$$

$$\langle x^2 \rangle = 2 \int_0^\infty x^2 \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega_0^2 x^2}{\hbar}} dx$$

$$= 2\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega_0^2}{\hbar}\right)^{-3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega_0}$$

Videre får vi:

$$\langle p^2 \rangle = -2 \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx \quad ; a = \frac{m\omega_0}{\hbar}$$

$$= -\frac{2\hbar^2}{m} \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-ax^2}(-a + a^2x^2)\, dx$$

$$\langle p^2 \rangle = 2\hbar^2 \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \left(a \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) - a^2 \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)\right)$$

$$= 2\hbar^2 \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{a}\sqrt{\pi} - \frac{1}{4}\sqrt{a}\sqrt{\pi}\right)$$

$$= 2\hbar^2 \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$$

$$= \frac{\hbar\omega_0}{4} \cdot 2m.$$

b) Forventningsverdien av $\langle V \rangle$ blir

$n=0$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega_0} = \frac{1}{4}\hbar \frac{\omega_0^2}{\omega_0}$$

$$= \frac{1}{4}\hbar\omega_0$$

$$= \frac{1}{2} E_0$$

Forventningsverdien av $\langle T \rangle$

$$\langle T \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} =$$

$n=0$

$$\langle T \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{4} \cdot \frac{2m}{2m} = \frac{\hbar\omega_0}{4} = \frac{1}{2} E_0$$

c)

$$\Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)(\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2)}$$

$$\langle x\rangle = 0 \quad , \quad \langle p\rangle = 0$$

$$\Delta x \, \Delta p = \sqrt{\langle x^2\rangle \cdot \langle p^2\rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} k \langle x^2\rangle = \frac{E_n}{2} \quad \Rightarrow \quad \langle x^2\rangle = \frac{E_n}{k}$$

$$\frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \frac{E_n}{2} = \quad \langle p^2\rangle = E_n \cdot m$$

$$(\Delta x \, \Delta p)^2 = E_n^2 \cdot \frac{m}{k} = \hbar^2 \omega_0^2 \cdot \frac{m}{k} (n+\tfrac{1}{2})^2$$

$$= \hbar^2 (n+\tfrac{1}{2})^2$$

$$\Delta x \, \Delta p = \hbar (n+\tfrac{1}{2})$$

Oppgave 3.

a) Se lærebok

Energien til en dipol (magnetisk) i et ytre felt kan skrives som

$$V_M = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}$$

Krafta i z-retningen er da gitt som

$$\bar{F} = -\nabla \bar{V}$$

$$\Rightarrow \quad F_z = -\frac{\partial}{\partial z}(-\mu_z B_z) = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Nå er $\langle \mu_z \rangle = -g_s \mu_B m_s$, slik at krafta kan skrives som

$$F_z = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B g_s m_s .$$

Hastigheten til et hydrogenatom som kommer ut fra ovnen kan beregnes som

$$\frac{1}{2} m v_x^2 = 2kT$$

$$v_x = \sqrt{\frac{4kT}{M}}$$

Traverstiden er da gitt av

$$t = \frac{L_x}{v_x} = L_x \sqrt{\frac{M}{4kT}}$$

Utslaget i z-retningen for et spinn opp atom:

$$z = \frac{1}{2} a_z t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{M} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{M} \cdot L_x^2 \frac{M}{4kT}$$

$$= - \frac{\frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B \cdot g_s m_s L_x^2}{8kT}$$

$$= - \frac{10 \cdot 0.927 \cdot 10^{-23} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}} = -2.1 \cdot 10^{-3} m$$

og tilsvarende for spin ned. Dette gir splittingen: 4.2 mm.

c)

c) Hydrogenatomet har $n = 2$, $l = 1$
Det betyr at vi kan ha tilstandene

$$P_{1/2} \quad \text{og} \quad P_{3/2}.$$

For et svakt magnetfelt er j et godt kvantetall. I $2P_{3/2}$ tilstanden er

$$g = 1 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} - 2 + \frac{3}{4}}{\frac{15}{2}} = \frac{4}{3}$$

og $$\langle V_M \rangle = \frac{4}{3}\mu_B \cdot B \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

Slik at total splitting blir $\Delta V_M = 4\mu_B \cdot B$.

Denne er større enn den tilsvarende splitting i $2P_{1/2}$ tilstanden.

I et sterkt magnet felt

$$\langle V_M \rangle = \mu_B \cdot B\,(m_l + 2m_s) \quad , m_l = \pm 1, 0, \quad m_s = \pm 1/2$$

Det fører igjen til at total splitting er

$$\delta V_M = \mu_B \cdot B\big((1 + 2\cdot 1/2) - (-1 - 2\cdot 1/2\big) = 4\mu_B \cdot B.$$

Spinn bane koblingen er gitt som

$$\langle V_{SL} \rangle = \frac{Z^4 \alpha^2}{n^3} \cdot E_0 \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{l(l+1)(2l+1)}$$

For $2P_{3/2}$ tilstanden er $j = l + 1/2 = 3/2$

$Z = 1$, $n = 2$, slik at

$$\langle V_{SL} \rangle = \frac{\alpha^2}{n^3} E_0 \cdot \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2 - \frac{3}{4}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\alpha^2}{n^3} E_0 \frac{1}{6}$$

Dette settes lik Zeemann splittingen

$$\frac{\alpha^2}{n^3} E_0 \cdot \frac{1}{6} = 4 \mu_B \, B$$

$$\Rightarrow B = \frac{\alpha^2}{n^3} \frac{E_0}{6 \cdot 4 \mu_B} = \frac{1}{(137)^2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{13.6 \cdot 1.6 \, 10^{-19}}{6 \cdot 4 \cdot 0.93 \cdot 10^{-23}}$$

$$= 0.065 \text{ Tesla}$$

Oppgave 4.

a) Rotasjonsenergien er gitt av

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

$$\Delta E_2 = \frac{\hbar^2}{2I}\left((J+2)(J+3) - (J+1)(J+2)\right)$$

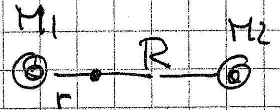
$$= \frac{\hbar^2}{2I}(J+2)\cdot 2$$

$$\Delta E_1 = \frac{\hbar^2}{2I}\left((J+1)(J+2) - J(J+1)\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2I}(J+1)\cdot 2$$

$$\delta \Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2 = \frac{\hbar^2}{I}$$

Vi må nå beregne I.



Treghetsmomentet for en slik rotator er

$$I = \mu R^2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} R^2$$

Dette følger av : $r = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot R$

$$I = M_1 \frac{M_2^2}{(M_1+M_2)^2} R^2 + M_2 \frac{M_1^2}{(M_1+M_2)^2} R^2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} R^2$$

Tallverdier

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = 1.62 \cdot 10^{-27} \text{kg}.$$

Avstanden finnes fra

$$\delta \Delta E = \frac{\hbar^2}{I} = \frac{\hbar^2}{\mu R^2}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{\hbar^2}{\mu \, \delta \Delta E} = \frac{(1.055 \cdot 10^{-34})^2}{1.62 \cdot 10^{-27} \; 0.026 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}$$

$$= 1.28 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

b)

Kraftkonstanten er lik $V''(R_0)$; vi rekkeutvikler omkring likevektspunktet R_0 og får da

$$V(R) = V(R_0) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{V'(R_0)}(R-R_0) + \frac{1}{2}V''(R_0)(R-R_0)^2 + \dots$$

$$\therefore \quad K = V''(R_0)$$

Nullpunktsenergien er $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{K}{\mu}}$

For Ar_2

$$K = \frac{72\cdot(1.05\cdot 10^{-2}\,eV)(1.6\cdot 10^{-19}\,J/eV)}{2^{1/3}\cdot(3.4\cdot 10^{-10}\,m)^2} = 0.83\,J/m^2$$

Som gir

$$E_0 = \frac{1}{2}(1.05\cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{0.83}{\frac{39.95}{2}\cdot 1.67\cdot 10^{-27}}} = 2.6\cdot 10^{-22}\,J$$

$$\underline{= 1.6\,meV}$$

Bindingsenergien:

$$E_B = \epsilon - E_0 = 10.5 - 1.6\,meV = 8{,}9\,meV.$$

He_2: ~~$E_0 = \frac{1}{2}$~~

$$K = \frac{72(8{,}79\cdot 10^{-4})\cdot 1.6\cdot 10^{-19}}{2^{1/3}\cdot(2.56\cdot 10^{-10})^2} = 0.123\,J/m^2$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\,1.05\cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{0.123}{4/2\cdot 1.67\cdot 10^{-27}}} = 3.18\cdot 10^{-22}\,J$$

$$= 2.0\,meV$$

Bindingsenergi:

$$E_B = \epsilon - E_0 = 0.88 - 2.0\,meV < 0$$

$\therefore$ Ingen binding

b) Ar har fulle skall. Vekselvirkningen er derfor av typen dipol - dipol
o: instantan dipol – indusert dipol.
Dette er den såkalte van der Waals vekselvirkning. som for lange avstander er proporsjonal med $1/R^6$

Lennard-Jones er et fenomenologisk potensial som for lange avstander $\sim 1/R^6$

$$V_{LJ} = 4\epsilon\left(\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{n} - \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{6}\right)$$

Med $n = 12$

$$V_{LJ} = 4\epsilon\left(\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{6}\right)$$

c)
$$V(R) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{6}\right]$$

$$V''(R) = \frac{4\epsilon}{R^2}\left[12\cdot 13\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{12} - 6\cdot 7\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{6}\right]$$

$$V'(R_0) = -\frac{4\epsilon}{R_0}\left[12\left(\frac{\sigma}{R_0}\right)^{12} - 6\left(\frac{\sigma}{R_0}\right)^{6}\right] = 0$$

$$\left(\frac{\sigma}{R_0}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad R_0 = 2^{1/6}\cdot\sigma$$

Som innsatt gir

$$V''(R_0) = \frac{4\epsilon}{2^{1/3}\cdot\sigma^2}\left(\frac{12\cdot 13}{4} - \frac{6\cdot 7}{2}\right) = \frac{72\epsilon}{2^{1/3}\sigma^2}$$

d)

Energien er med de oppsatte bølgefunksjonene gitt av

$$\epsilon_\pm = \int \psi_\pm^* H \psi_\pm \, dx \Big/ \int |\psi_\pm|^2$$

Nevneren i dette uttrykket blir

$$D = \frac{1}{2} \left\{ \int (|\phi_a|^2 + |\phi_{-a}|^2 \pm 2\phi_a \phi_{-a}) dx \right.$$

$$= 1 \pm \Delta \qquad \text{med } \Delta = \int \phi_a \phi_{-a} \, dx$$

Δ blir liten for stor separasjon mellom brønnene; liten overlapp av b.f.

Teller:

$$N = \frac{1}{2} \int (\phi_a \pm \phi_{-a}) H (\phi_a \pm \phi_{-a}) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \phi_a^* H \phi_a dx + \int \phi_{-a} H \phi_{-a} dx \pm \int \phi_a H \phi_{-a} dx + \int \phi_{-a} H \phi_a \, dx$$

ϕ_a er en egenfunksjon av en oscillator plassert i $+a$ og tilsvarende for ϕ_{-a}

Vi kan skrive for det første integralet

$$\int \phi_a H \phi_a dx = \int \phi_a (T + V_{dobb} + V_{enkel} - V_{enkel}) \phi_a \, dx$$

$$= \int \phi_a H_{enkel} \phi_a \, dx + \int \phi_a (V_{dobb} - V_{enkel}) \phi_a dx$$

$$= \epsilon_0 + K$$

Der:

$$K = \int \phi_a \Delta V \phi_a dx = \int \phi_a V_2 \phi_a dx$$

$V_2 = 0$ for $x > 0$

$V_2 = V_{dobb} - V_{enkel} = \frac{1}{2}k(x+a) - \frac{1}{2}k(x-a)$ $x < 0$

$= 2kxa$ for $x < 0$

Hele området kan skrives på formen

$$V_2 = -k(-x + |x|)a$$

Helt analogt finner vi at

$$K = \int \phi_{-a}^2 V_1(x) dx$$

med $V_1(x) = -k(x + |x|)$

Vi har i tillegg ledd av formen

$$\pm \int \phi_a H \phi_{-a} dx = \pm \int \phi_a H_{-a} \phi_a dx \pm \int \phi_a (V_{dobb} - V_{enk}) \phi_{-a} dx$$

$$= \pm \epsilon_0 \Delta \pm \int \phi_a \phi_{-a} V_1(x) dx = \pm \epsilon_0 \Delta \pm S$$

Samler vi alle ledd får vi

$$\epsilon_\pm = \frac{\epsilon_0(1 \pm \Delta) + K \pm S}{1 \pm \Delta} = \epsilon_0 + \frac{K \pm S}{1 \pm \Delta}$$

$$= \epsilon_0 + K \pm S + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

$$S = \int \phi_{-a} V_1(x) \phi_a \, dx$$

$$= -\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right) ka \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\alpha(x+a)^2} \cdot e^{-\alpha(x-a)^2} (x + |x|)$$

$$= -\frac{4\alpha}{\pi} ka \, e^{-2\alpha a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-2\alpha x^2} \cdot x$$

$$= B e^{-2\alpha a^2}$$

Dette qir

$$\epsilon_- - \epsilon_+ = -2S \approx e^{-2\alpha a^2}$$