

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
 Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Ola Hunderi

Tlf.: 93411

EKSAMEN I FAG SIF4065 ATOM- OG MOLEKYLFYSIKK

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

13. august 2002

Tid: 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler : C - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne

Rottmann: Matematisk formelsamling (alle utgaver)

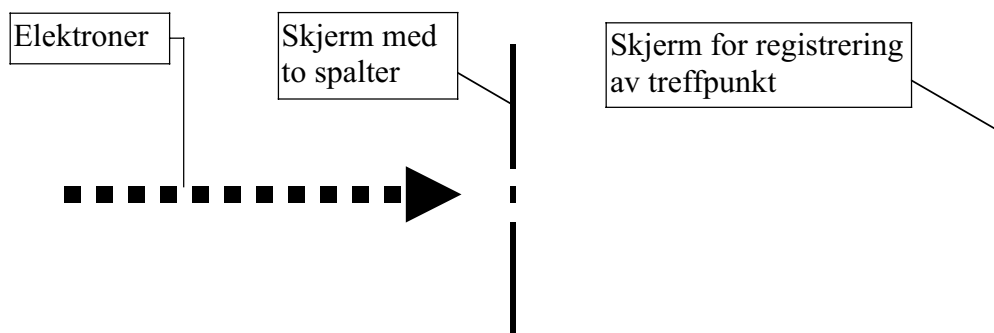
Barnet & Cronin: Mathematical Formulae

O. Øgrim og B. Ebbe Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Sensuren faller i uke 36

Oppgave 1

a) Nedenfor er gitt en skisse av Youngs tospalte-interferensforsøk:



I dette tilfelle er det elektroner (med bestemt energi) som sendes inn mot de to spaltene på figuren. Forklar hvordan forsøk med dette oppsettet kan indikere at partikler (her elektroner) har en slags bølgenatur !

b) Gjør rede for Stern-Gerlach eksperimentet. Forklar hvorfor det er nødvendig med et magnetfelt som har en feltgradient for å utføre eksperimentet. Gi en kort utledning som viser at kraften i z-retningen på en partikkel med spinn-kvantetall s , m_s er gitt av

$$F_z = - \frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B g_s m_s$$

- c) En stråle av hydrogenatom kommer ut av en ovn med temperatur $T = 500\text{K}$. Strålen sendes gjennom et Stern-Gerlach apparat med lengde $x = 0.8\text{m}$. Feltgradienten i apparatet er $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 15\text{ T/m}$. Beregn splittingen mellom spinn opp og spinn ned strålene ved utgangen av Stern-Gerlach magneten. Hvorfor er det tillatt å anta at hydrogenatomene er i grunntilstanden når de kommer ut av ovnen?
- d) Gi en kort utledning av bidraget fra spin-bane koplingen til Hamiltonfunksjonen og den tilsvarende endring av energinivåene i et atom. Vis at bidraget til Hamiltonfunksjonen kan skrives på formen

$$V_{SL} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{2m_e^2 c^2 r^3}$$

Faktoren $1/2$ i siste del av uttrykket kommer fra en relativistisk korreksjon. Denne trenger du ikke forklare nærmere.

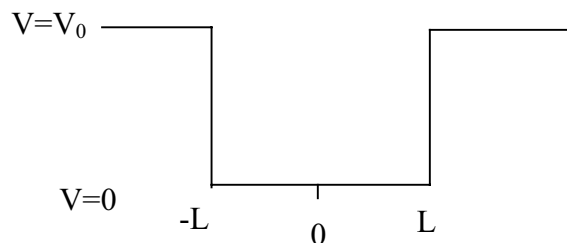
Hvorfor er det ingen spin-bane splitting av grunntilstanden i hydrogen?

- e) Spin-bane bidraget i hydrogen er typisk av størrelsesorden $\Delta E = 10^{-23}\text{J}$. Bruk dette til å beregne styrken av det magnetfeltet som virker på spinnets magnetiske moment.

Oppgitt: $\mu_s = \mu_B = 0.92 \cdot 10^{-23}\text{ amp}\cdot\text{m}^2$.

Oppgave 2

I dette problemet skal vi se på de tillatte tilstander i en én-dimensjonal boks med endelig veggpotensial slik som vist på figuren. En partikkel med masse m beveger seg i dette potensialet.



- a) Bundne tilstander i et slikt potensial må ha en bestemt paritet. Vis at for løsninger med like paritet må bølgefunksjonen ha formen

$$\psi = \begin{cases} A e^{\alpha x} & x \leq -L \\ B \cos kx & -L \leq x \leq L \\ A e^{-\alpha x} & x \geq L \end{cases}$$

Hva er α og k ?

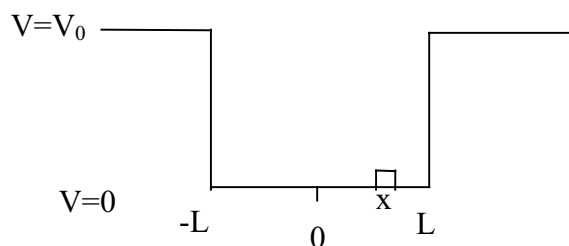
- b) Finn de tilsvarende formene på løsningene med odde paritet.
- c) Angi grensebetingelsene som må være oppfylt for $x=\pm L$. Bruk disse til å vise at for løsninger med like paritet er betingelsene for løsning og dermed energien gitt av

$$\operatorname{tg}(kL) = \frac{\alpha}{k}$$

og tilsvarende for odde paritet

$$\cot g(kL) = -\frac{\alpha}{k}$$

- d) Normer bølgefunksjon i punkt a); dvs. finn A og B. Du kan anta at E er kjent.
- e)



Figuren viser en brønn der potensialet har en liten perturbasjon. Dette fører til en liten endring i energiene til de bundne tilstandene. På figuren er perturbasjonen plassert i en tilfeldig posisjon x . Vi skal i dette spørsmålet se på to tilfelle.

- i) perturbasjonen er plassert i sentrum av brønnen
 ii) perturbasjonen er plassert i ytterkant av brønnen

Hvilken av disse plasseringene av perturbasjonen vil føre til størst forandring av energien for

- iii) symmetriske bølgefunksjoner
 iv) antisymmetriske bølgefunksjoner

Oppgave 3

En liten partikkel med masse m er bundet til en tung partikkel med masse M . $M \gg m$. Systemet kan betraktes som endimensjonalt. Potensialet mellom de to partiklene er et harmonisk oscillator potensial gitt av

$$V = \frac{1}{2} k (x - X)^2$$

I dette uttrykket er x koordinaten til den lette partikkelen og X koordinaten til den tunge partikkelen.

- a) Vis at Hamiltonfunksjonen til systemet er gitt av

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k (x - X)^2 \quad (1)$$

Anta først at den tunge partikkelen er låst fast. Vi har da en enkel harmonisk oscillator. Energinivåene er da gitt av uttrykket $E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Uttrykk ω_c ved hjelp parametere du kjenner fra Hamiltonfunksjonen.

- b) Vi skal så tillate den tunge partikkelen å bevege seg; dvs. vi skal finne energinivåene for Hamiltonfunksjonen gitt i ligning (1). Oppgaven løses på følgende måte: Innfør nye koordinater; tyngdepunktskoordinaten $Q = \frac{mx + MX}{m + M}$ og den relative koordinaten $q = x - X$. Vis at i dette systemet av koordinater blir Hamiltonfunksjonen

$$H = \frac{P_Q^2}{2(M + m)} + \frac{p_q^2}{2\mu} + \frac{1}{2} kq^2$$

- c) Vis at bølgefunksjonen kan separeres i en Q -avhengig del og en q -avhengig del; $\psi = \chi(Q)\phi(q)$ og finn/angi χ og ϕ .

Finn energinivåene i systemet og vis at løsningen reduseres til løsningen for en enkel harmonisk oscillator når $M \rightarrow \infty$.

- d) En en-dimensjonal harmonisk oscillator med ladning e påvirkes av et ytre elektrisk felt E i positiv x -retning slik at den potensielle energi er gitt av

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 - eEx$$

Vis at Schrödingerligningen kan løses eksakt for dette tilfelle.

Hint: Potensialet kan skrives på formen $V(x) = \frac{1}{2} k(x - x_0)^2 + V_0$ der V_0 og x_0 er konstanter. Bruk dette til å finne energinivåene for dette systemet.

Oppgave 4

Vi skal i denne oppgaven sammenligne karakteristiske vibrasjons- og rotasjons-energi for HCl molekylet.

Oppgitt: Kraftkonstanten for HCl molekylet $K = 470 \text{ N/m}$.
 $M_{\text{Cl}} = 35.5 M_{\text{H}}$; $M_{\text{H}} = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

- a) Gi en begrunnelse for at energien til vibrasjonsnivåene er gitt av

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$$

med $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$ der μ er den reduserte masse. Beregn energiforskjellen mellom grunntilstanden og lavest eksiterte tilstand.

- b) Beregn antall rotasjonsnivåer for HCl molekylet mellom grunntilstanden og første eksiterte vibrasjonstilstand.

Oppgitt: $E_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1)$ med $I = 2.66 \cdot 10^{-47} \text{ kg m}^2$.

- c) Ved romtemperatur vil kollisjoner mellom HCl molekyler kunne eksitere mange rotasjonsnivåer, men ingen vibrasjonsnivåer. Begrunn dette utsagnet. Ved hvilken temperatur vil antallet molekyler i det første eksiterte vibrasjonsnivå være lik 1/e av antallet i grunntilstanden?