

Bølgeforplantning i lagdelte strukturer  
Optiske filtre

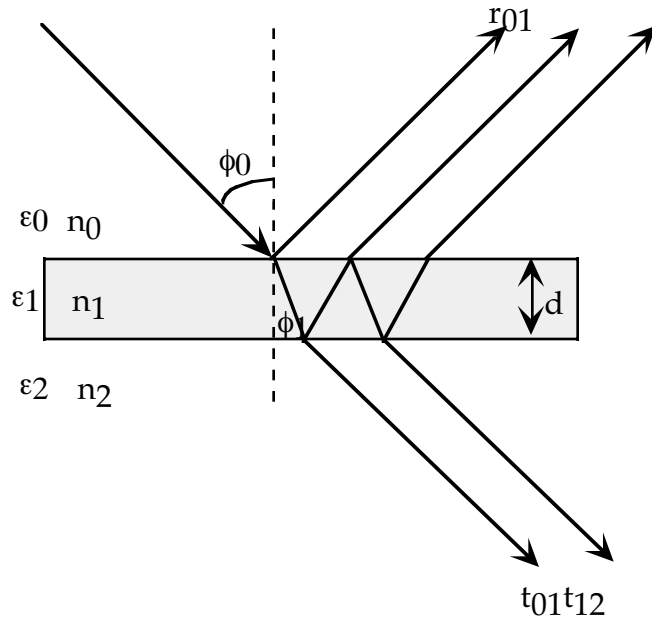
av

Ola Hunderi

## REFLEKSJON OG TRANSMISJON

Utgangspunktet for diskusjonen i dette kapitlet er Maxwells ligninger. Disse fører til at tangentialkomponentene av  $\vec{E}$  og  $\vec{H}$  er kontinuerlige, noe som igjen er grunnlaget for utledning av Fresnels formler. Alt dette anses kjent.

Vi skal nå se litt på refleksjon og transmisjon til en tynn film på en overflate. Systemet er illustrert i figuren under.



Den innfallende bølgen  $E_i$  reflekteres ved den første flaten. Noe transmitteres, reflekteres ved den indre flaten, transmitteres ved flate 1 etc. Vi får en sum av delbølger: (NB! Vi summerer feltamplituder)

$$\begin{aligned}
 r &= r_{01} + t_{01}r_{12}t_{10}e^{2i\delta_1} + t_{01}r_{12}r_{10}r_{12}t_{10}e^{4i\delta_1} + \dots \\
 &= r_{01} + \frac{r_{12}t_{01}t_{10}e^{2i\delta_1}}{1 + r_{12}r_{01}e^{2i\delta_1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= t_{01}t_{12}e^{i\delta_1} + t_{01}r_{12}r_{10}t_{12}e^{3i\delta_1} + \dots \\
 &= \frac{t_{01}t_{12}e^{i\delta_1}}{1 + r_{12}r_{01}e^{2i\delta_1}}
 \end{aligned}$$

Ved å bruke Fresnels formler kan r-ligningen forenkles,

$$r = \frac{r_{01} + (r_{01}^2 r_{12} + r_{12} t_{01} t_{10} e^{2i\delta_1})}{1 + r_{12} r_{01} e^{2i\delta_1}}$$

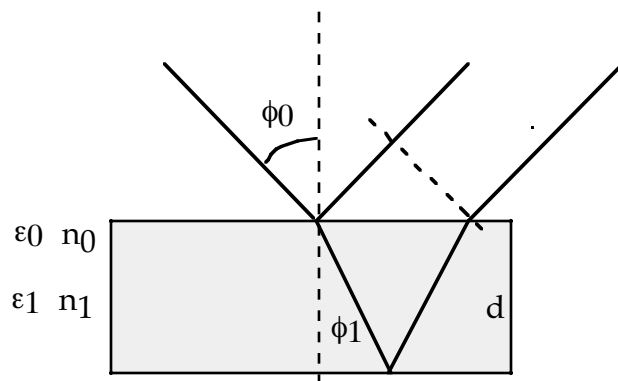
Fra Fresnels formler fås at  $r_{01}^2 + t_{01} t_{10} = 1$ . Dette fører da til

$$r = \frac{r_{01} + r_{12} e^{2i\delta_1}}{1 + r_{12} r_{01} e^{2i\delta_1}} \quad \text{Vis dette!}$$

$2\delta_1$  er faseforskjellen mellom bølge 1 og 2. Ut fra geometri/optisk veilengdeforskjell blir den

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d_1 \cos \varphi_1$$

Bevis:



Forskjellen i optisk veilengde er gitt av figuren:

$$\begin{aligned} & \frac{n_1 2d}{\cos \phi_1} - 2d \operatorname{tg} \phi_1 \sin \phi_0 n_0 \\ &= 2d \left( \frac{n_1}{\cos \phi_1} - \operatorname{tg} \phi_1 \sin \phi_0 n_0 \right) \\ &= 2d \left( \frac{n_1}{\cos \phi_1} - \frac{\sin \phi_1}{\cos \phi_1} n_1 \sin \phi_1 \right) = 2d n_1 \cos \phi_1 \end{aligned}$$

Dette gir da  $\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d_1 \cos \varphi_1$  som angitt ovenfor.

$r_{01}$  og  $r_{12}$  er refleksjonskoeffisientene ved grenseflaten 0,1 og 1,2. Disse er da gitt av Fresnels formler



En dobbelfilm kan nå løses ved rekursjon ved at vi lar refleksjonen fra baksiden av film nr. 1 være gitt av formelen for et filmdekt substrat.

$$r = \frac{r_{01} + \rho e^{2i\delta_1}}{1 + \rho \cdot r_{01} e^{2i\delta_1}}$$

Hvor  $\rho = \frac{r_{12} + r_{23} e^{2i\delta_2}}{1 + r_{12} \cdot r_{23} e^{2i\delta_2}}$

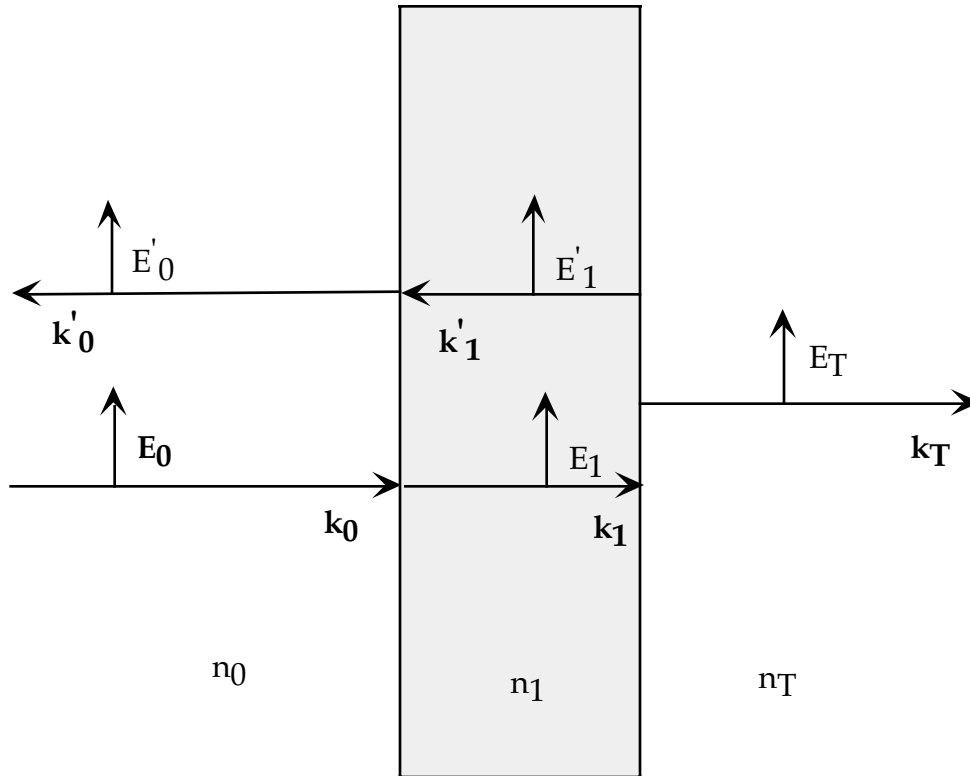
settes dette inn fås:

$$r = \frac{r_{01} + r_{12} e^{2i\delta_1} + r_{23} e^{2i(\delta_1 + \delta_2)} + r_{01} r_{12} r_{23} e^{2i\delta_2}}{1 + r_{01} r_{12} e^{2i\delta_1} + r_{01} r_{23} e^{2i(\delta_1 + \delta_2)} + r_{12} \cdot r_{23} e^{2i\delta_2}}$$

Dette blir komplisert etter hvert. Vi går heller over til en matriseformalisme. Denne formalismen viser seg å være bedre egnet for et system som inneholder mange filmer.

## MATRISETEORI FOR TYNNE FILMER

Vi skal her utlede et uttrykk for transfer matrisen for en tynn film. Se på følgende situasjon:



Vi har en film av tykkelse  $d$ . Systemet består av en innfallende bølge med  $\vec{E}$ -vektor  $\vec{E}_0$  og innfallende  $\vec{k}$ -vektor  $\vec{k}_0$ , en tilsvarende transmittert og reflektert i filmen, en transmittert i det tredje mediet og en reflektert i det første mediet. Vi bruker kontinuitetsligningene fra Maxwells ligninger:

$E_{\text{tang}}$  er kontinuerlig,  $H_{\text{tang}}$  er kontinuerlig. Videre fås fra Maxwells ligninger:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu\omega \vec{H} \Rightarrow H = Z_0^{-1} n \cdot E \quad Z_0 \text{ er overflateimpedans}$$

$n$  er brytningsindeks

Kontinuitetsligningene anvendt på første grenseflate gir:

$$E_0 + E_0' = E_1 + E_1' \quad (\text{I})$$

$$H_0 - H_0' = H_1 - H_1' \quad (\text{NB! Retn. av } \vec{H} \text{ gitt av retn. av } \vec{E})$$

Bruker  $H \propto nE \Rightarrow$

$$n_0 E_0 - n_0 E_0' = n_1 E_1 - n_1 E_1' \quad (\text{II})$$

Andre grenseflate:

$$E_1 e^{ik_1 d} + E_1' e^{-ik_1 d} = E_T \quad (\text{III})$$

$$H_1 e^{ik_1 d} - H_1' e^{-ik_1 d} = H_T$$

$$n_1 E_1 e^{ik_1 d} - n_1 E_1' e^{-ik_1 d} = n_T E_T \quad (\text{IV})$$

Vi løser ligningene (I) - (IV) med hensyn på  $E_0'$  og  $E_T$ , eller rettere sagt vi omformerer ligningene på følgende måte

$$\text{III: } (E_1 + E_1') \cos k_1 d + (E_1 - E_1') i \sin k_1 d = E_T$$

$$\text{IV: } n_1 (E_1 - E_1') \cos k_1 d + n_1 (E_1 + E_1') i \sin k_1 d = n_T E_T$$

Vi eliminerer feltet inne i filmen for å få transfer matrisen. Dette gjøres enklest ved først å løse ligningene ovenfor m.h.p.  $E_0' + E_0$  og  $E_0 - E_0'$ .

Dette gir etter noe omforming:

$$1 + \frac{E_0'}{E_0} = (\cos k_1 d - i \frac{n_T}{n_1} \sin k_1 d) \frac{E_T}{E_0}$$

$$n_0 - n_0 \frac{E_0'}{E_0} = (-i n_1 \sin k_1 d + n_T \cos k_1 d) \frac{E_T}{E_0}$$

Skrevet på matrisform blir dette

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} \frac{E_0'}{E_0} = \begin{bmatrix} \cos k_1 d & -i \sin k_1 d \\ -i n_1 \sin k_1 d & \cos k_1 d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} \frac{E_T}{E_0}$$

Men  $\frac{E_0'}{E_0}$  er refleksjonskoeffisienten  $r$  og  $E_T/E_0$  er transmisjonskoeffisienten  $t$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = \overline{\overline{M}} \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t$$

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} \cos k_1 d & -i \sin k_1 d \\ -i n_1 \sin k_1 d & \cos k_1 d \end{bmatrix}$$

er transfer matrisen for den tynne filmen. For et system av mange filmer er den totale transfermatrisen gitt som et produkt av flere matriser

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = \overline{\overline{M}}_1 \overline{\overline{M}}_2 \overline{\overline{M}}_3 \overline{\overline{M}}_4 \dots \overline{\overline{M}}_n \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t$$

Vi kan således lett beregne r og t for svært kompliserte system ved å multiplisere 2x2 matriser.

Hver matrise er av formen

$$\overline{\overline{M}}_i = \begin{bmatrix} \cos k_i d_i & \frac{-i}{n_i} \sin k_i d_i \\ -i n_i \sin k_i d_i & \cos k_i d_i \end{bmatrix}$$

og produktet av formen  $\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Det fører til

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t$$

Dette utmultipliseres og gir

$$1 + r = (A + n_T B)t$$

$$n_0(1 - r) = (C + n_T D)t$$

Løst for r og t får vi:

$$r = \frac{An_0 + Bn_0 n_T - C - Dn_T}{An_0 + Bn_0 n_T + C + Dn_T}$$

$$t = \frac{2n_0}{An_0 + Bn_0 n_T + C + Dn_T}$$

=====

Det fysiske innhold/dens transferkarakter er lettere å se om vi skriver ligningen på følgende form

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_0' \\ H_0' \end{bmatrix} = \overline{\overline{M}} \begin{bmatrix} E_T \\ H_T \end{bmatrix}$$

$E_0 + E_0' = E_0^I$  er totalfeltet ved første flate etc.....

$$\begin{bmatrix} E_0^I \\ H_0^I \end{bmatrix} = \overline{\overline{M}} \begin{bmatrix} E_T \\ H_T \end{bmatrix}$$

Transfermatrisen *overfører* således feltet fra en grenseflate til den neste.

For ikke vinkelrett innfall kan vi utvikle den samme teorien. Vi starter med det samme antall bølger, tar  $\varphi$  til å være innfallsvinkel. Grensebetingelsene er de samme, *tangentialkomponent* av E og H er kontinuerlige.

Her må vi nå skille mellom to tilfeller, s og p polarisert lys. Dette fører til følgende (utled det selv!)

p Polarisasjon:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = \overline{\overline{M}}_p \begin{bmatrix} \cos \varphi_T \\ n_T \end{bmatrix} t$$

med

$$\overline{\overline{M}}_p = \begin{bmatrix} \cos \beta & \frac{-i}{p} \sin \beta \\ -ip \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\beta = k_1 d \cos \varphi_1 \quad p = n_1 / \cos \varphi_1$$

$n_1$  er brytningsindeks i filmen

$\varphi_1$  er vinkel i filmen

Dette gir til slutt:

$$r_p = \frac{An_0 \cos \varphi_T + Bn_0 n_T - C \cos \varphi_0 \cos \varphi_T - Dn_T \cos \varphi_0}{An_0 \cos \varphi_T + Bn_0 n_T + C \cos \varphi_0 \cos \varphi_T + Dn_T \cos \varphi_0}$$

og en tilsvarende ligning for  $t_p$ .

For s polarisasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \cos \varphi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \cos \varphi_0 \end{bmatrix} r = \overline{\overline{M}}_s \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \cos \varphi_T \end{bmatrix} t$$

$\overline{\overline{M}}_s$  har samme form som  $\overline{\overline{M}}_p$ , men med



$$\beta = k_1 d \cos \varphi_1 \quad p = n_1 \cos \varphi_1$$

og

$$r_s = \frac{A n_0 \cos \varphi_0 + B n_0 n_T \cos \varphi_0 \cos \varphi_T - C - D n_T \cos \varphi_T}{A n_0 \cos \varphi_0 + B n_0 n_T \cos \varphi_0 \cos \varphi_T + C + D n_T \cos \varphi_T}$$

I grensen  $d \Rightarrow 0$  blir  $A = D = 1$ ,  $B = C = 0$

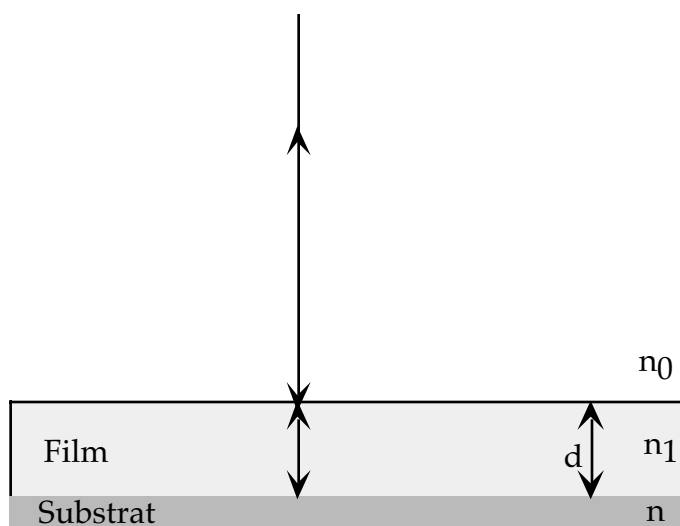
$$r_p = \frac{n_0 \cos \varphi_T - n_T \cos \varphi_0}{n_0 \cos \varphi_T + n_T \cos \varphi_0}$$

$$r_s = \frac{n_0 \cos \varphi_0 - n_T \cos \varphi_T}{n_0 \cos \varphi_0 + n_T \cos \varphi_T}$$

Dette er intet annet enn Fresnels formler for refleksjon fra en filmfri flate.

### ANTIREFLEKS BELEGG

Systemet er vist på figuren under. Vi tar vinkelrett innfall  
Der har vi vist at:



$$r = \frac{An_0 + Bnn_0 - C - Dn}{An_0 + Bnn_0 + C + Dn}$$

$$A = \cos k_1 d$$

$$C = -in_1 \sin k_1 d$$

$$B = \frac{-i}{n_1} \sin k_1 d$$

$$D = A$$

Innsatt fås:

$$r = \frac{n_1(n_0 - n) \cos kd - i(nn_0 - n_1^2) \sin kd}{n_1(n_0 + n) \cos kd - i(nn_0 + n_1^2) \sin kd}$$

V tar  $d = \lambda/4 \rightarrow \cos kd = 0, \sin kd = 1.0$

Dette gir:

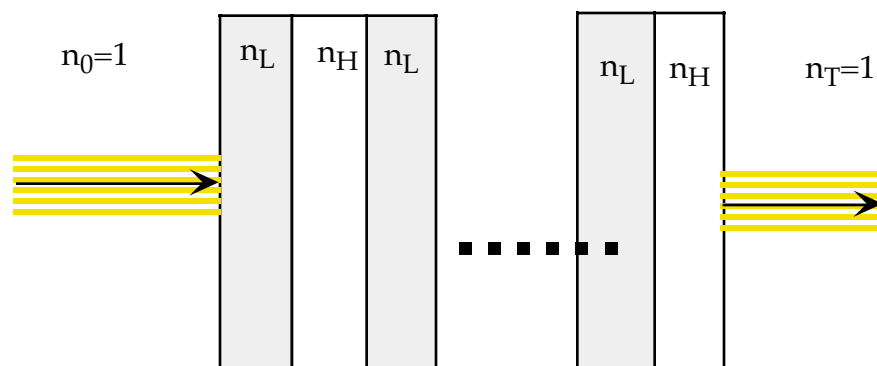
$$r = \frac{(nn_0 - n_1^2)}{(nn_0 + n_1^2)}$$

Når  $n_1 = \sqrt{n_0 n}$  blir  $r = 0$

Dette er grunnlaget for antirefleksbelegg på linser etc. Slik som beskrevet her virker belegget bare for  $\perp$  innfall, og p.g.a. dispersjon og også bare ved en  $\lambda$ . For å få til et bredbånds antirefleksbelegg må man gå til multibelegg. Dette kommer vi tilbake til senere.

### HØG-REFLEKTANS BELEGG

For laserformål behøves belegg med høy refleksjonsevne. La oss derfor se på følgende system



Vi har et system som består av belegg med vekselvis lav og høy brytningsindeks. For et slikt system gjelder

$$\bar{\bar{M}}_i = \begin{bmatrix} \cos k_i d_i & \frac{-i}{n_i} \sin k_i d_i \\ -i n_i \sin k_i d_i & \cos k_i d_i \end{bmatrix}$$

La oss velge tykkelsen slik at hvert belegg er en kvart bølgelengde tykt.  $k_i d_i = \pi/2$ .

$$\bar{\bar{M}}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_i} \\ -i n_i & 0 \end{bmatrix}$$

For 2N lag fås for den totale transfer matrise:

$$\bar{\bar{M}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_L} \\ -i n_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_H} \\ -i n_H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_L} \\ -i n_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_H} \\ -i n_H & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_H} \\ -i n_H & 0 \end{bmatrix}$$

Produktet av 2 nabomatriser blir av formen

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} -n_H / n_L & 0 \\ 0 & -n_L / n_H \end{bmatrix}$$

Denne er diagonal og produktet av våre 2N matriser blir derfor

$$\bar{\bar{M}}_{2N} = \begin{bmatrix} -n_H / n_L & 0 \\ 0 & -n_L / n_H \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} (-n_H / n_L)^N & 0 \\ 0 & (-n_L / n_H)^N \end{bmatrix}$$

For refleksjonskoeffisienten gir dette:

$$r = \frac{(-n_H / n_L)^N - (-n_L / n_H)^N}{(-n_H / n_L)^N + (-n_L / n_H)^N}$$

og intensitets refleksjons koeffisienten R

$$R = r^2 = \left[ \frac{1 - (n_L / n_H)^{2N}}{1 + (n_L / n_H)^{2N}} \right]^2$$

Vi ser med en gang at  $R \rightarrow 1$  når N blir stor.

Vi har ikke tatt med substratet i denne siste beregningen. Dersom vi gjør det vil vi finne at det er av betydning hvilken film som er ytterst; en høgindeksfilm eller en lavindeksfilm. I beregningen ovenfor startet er en lavindeksfilm ytterst. Tar vi med substratet finner vi en refleksjonsevne:

$$R = r^2 = \left[ \frac{A - Dn_T}{A + Dn_T} \right]^2 = \left[ \frac{1 - (n_L/n_H)^{2N} n_T}{1 + (n_L/n_H)^{2N} n_T} \right]^2$$

Med en høgindeksfilm ytterst derimot får vi refleksjonsevne gitt som:

$$R = r^2 = \left[ \frac{A - Dn_T}{A + Dn_T} \right]^2 = \left[ \frac{1 - (n_H/n_L)^{2N} n_T}{1 + (n_H/n_L)^{2N} n_T} \right]^2$$

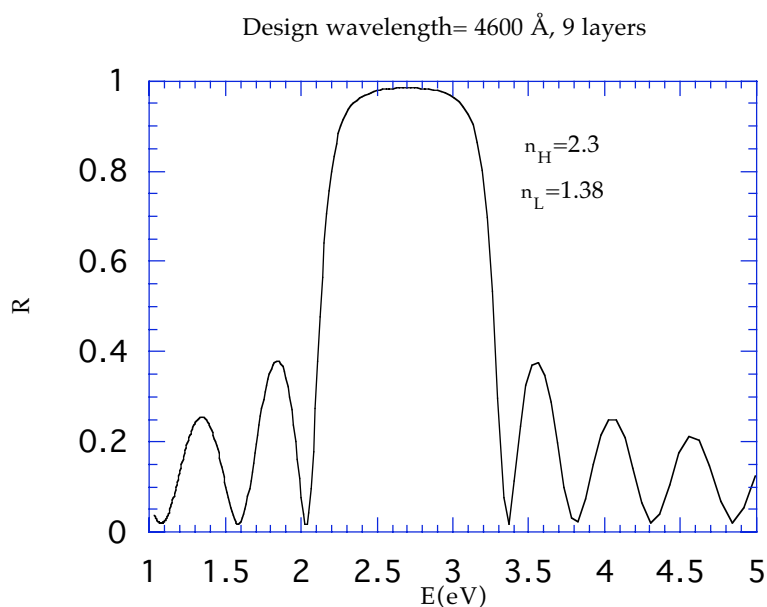
Ut fra disse formlene ser vi at høgindeksfilm ytterst gir høgst refleksjonsevne.

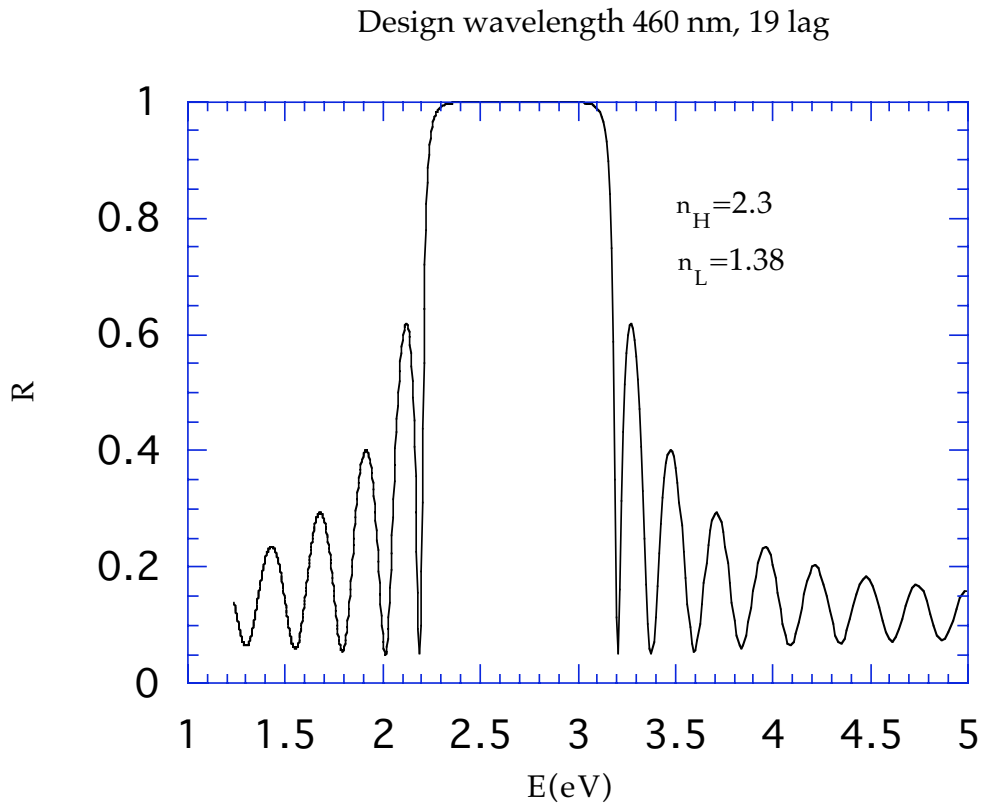
En viktig parameter er den såkalte båndbredden av et filter. Det kan vises at den er gitt av:

$$\sin \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm \frac{n_a - n_b}{n_b + n_a} \cong \sin \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \quad \text{da } \lambda \approx \lambda_0$$

der  $\Delta\lambda$  er båndbredden av filteret. Det er således kontrasten mellom brytningsindekser som bestemmer båndbredden.

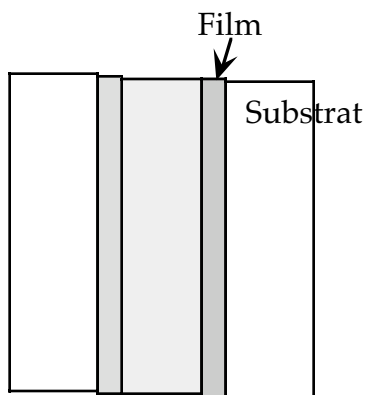
Figurene under viser to høgreflektansfiltere med henholdsvis 9 og 19 lag.



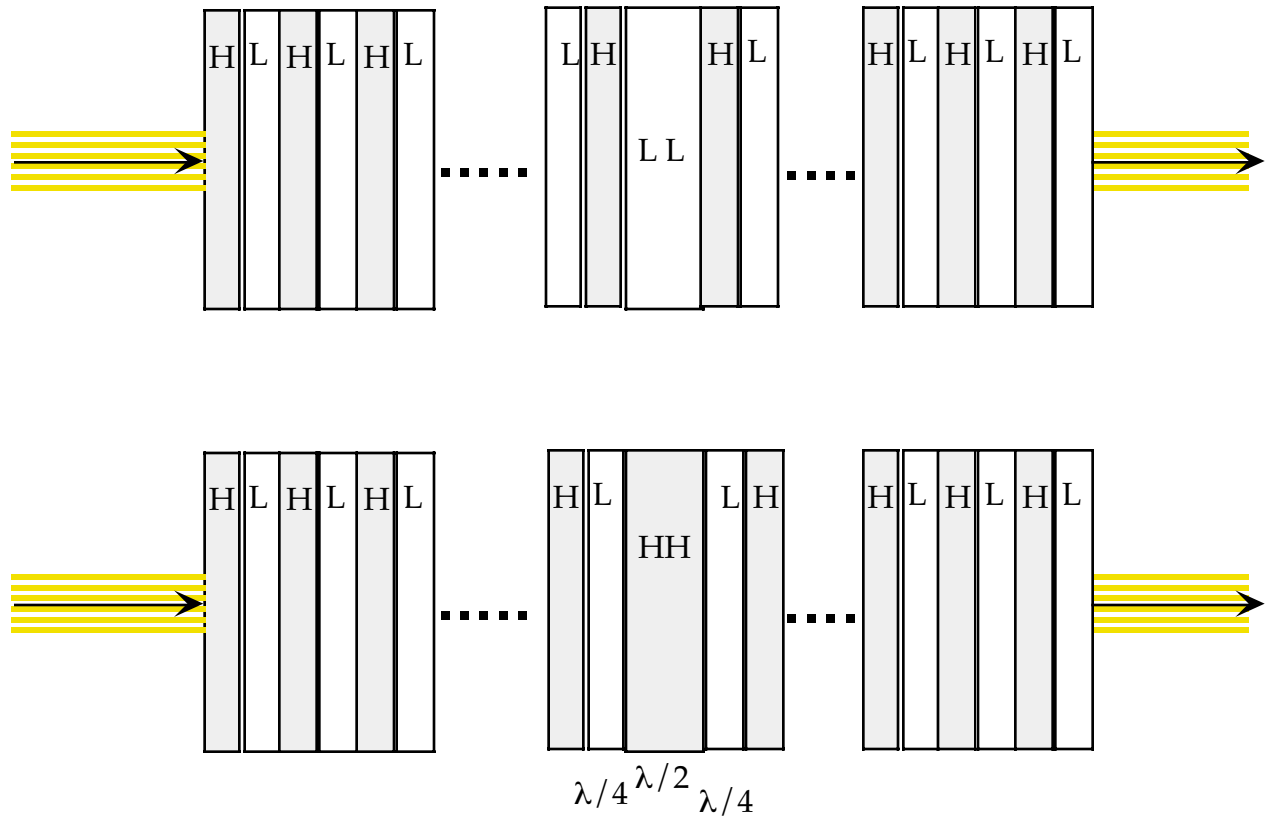


## BÅNDPASS FILTER

Et typisk båndpass filter er satt sammen av to høgreflektansfiltre og et såkalt Fabry Perot interferometer; se figuren.

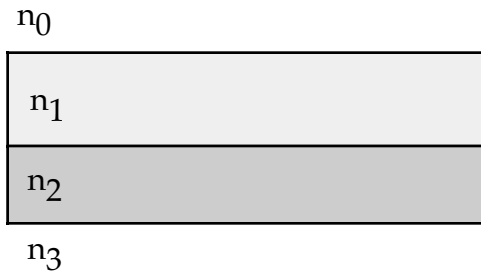


Opplosningsevnen av høgreflektansbeggets R. Dette gir mange mulige konfigurasjoner og to er vist på figuren.



### FLERE ANTIREFLEKSBELEGG

Vi har tidligere sagt at vi skulle komme tilbake til antirefleksbelegg med bedre båndbredde. Et eksempel er gitt på figuren.



$$M = \begin{bmatrix} -n_2/n_1 & 0 \\ 0 & -n_1/n_2 \end{bmatrix}$$

$$r = \frac{n_0 \frac{n_2}{n_1} - n_3 \frac{n_1}{n_2}}{n_0 \frac{n_2}{n_1} + n_3 \frac{n_1}{n_2}}$$

$$r = 0 \Rightarrow \frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{n_3}{n_0}$$

=====

Fordel er som allerede sagt en større båndbredde enn det som er mulig ved en enkel film.

Vi kan også lage antirefleks av

$$\frac{\lambda}{4} \quad \frac{\lambda}{2} \quad \frac{\lambda}{4} \quad \text{substrat.}$$

Eks.: MgF<sub>2</sub> ZrO<sub>2</sub> CeF<sub>3</sub> på glass

$$n = 1.37 \quad 2.1 \quad 1.63$$

## VEKSELVIRKNING MELLOM ELEKTROMAGNETISK STRÅLING OG MATERIE

Vi skal i dette kapitlet gå inn på begrepet vekselvirkning mellom elektromagnetisk stråling og materie. Responsfunksjonen har en del generelle egenskaper som kommer av at responsen er kausal; dvs. reaksjonen er bare avhengig av det som har skjedd i fortiden og ikke av det som skjer i framtiden. Dette fører blant annet til de såkalte Kramers Kronig relasjonene som vi nå skal utlede.

Fra begrepet kausalitet kan vi skrive

$$\bar{D}(t) = \epsilon_0 \bar{E}(t) + \bar{P}(t)$$

$\bar{P}(t)$  angir systemets respons, og avhenger av fortiden ): det som har skjedd tidligere. Herav

$$\bar{P}(t) = \epsilon_0 \int_0^{\infty} f(\tau) \bar{E}(t-\tau) d\tau = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \bar{E}(t-\tau) d\tau \text{ med } f(\tau)=0 \text{ for } \tau < 0$$

$f(\tau)$  er responsen. Den er null for alle tider større enn nåtiden, dette kommer inn i den måten vi har skrevet integralet på.  $t = 0$  er nå,  $t = \infty$  er  $\infty$  fortid.  $f(\infty) = 0$ .

Fourier-omvandler vi ligningen kan den skrives som

$$\bar{D}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{D}(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$\bar{E}(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{E}(\omega) e^{-i\omega t} \cdot e^{i\omega \tau}$$

Settes dette inn i den første ligningen fås

$$\bar{D}(\omega) = \epsilon_0 \bar{E}(\omega) + \epsilon_0 \bar{E}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau$$

$\epsilon$  er dielektrisitetskonstanten. Den kan være kompleks  $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ .

Fra ligningen ovenfor ser vi også at

$$\epsilon_r^* = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$$

Dette betyr at

$$\epsilon_1(\omega) - i\epsilon_2(\omega) = \epsilon_1(-\omega) + i\epsilon_2(-\omega)$$

Fra kausalitet får vi således at realdelen er symmetrisk i  $\omega$ , imaginærdelen antisymmetrisk.  $\epsilon-1$  er en analytisk funksjon i øvre halvplan av det komplekse plan.  $\epsilon-1 \rightarrow 0$  når  $\omega \rightarrow i\infty$  da bare  $\tau > 0$  gir bidrag.



Vi utfører nå følgende Cauchy integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_1} d\omega = I$$

$I = 0$  fordi  $\varepsilon(\omega) - 1$  er regulær i øvre halvplan.

Dette kan da skrives som: Residue i  $\omega = \omega_1 + P \int_{-\infty}^{\infty} = 0$ , og bidraget fra residue blir  $-i\pi(\varepsilon(\omega_1) - 1)$ . Ordner vi dette kan det hele skrives som

$$\varepsilon(\omega_1) - 1 = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_1} d\omega$$

Vi bytter integrasjonsvariable og skriver ut realdel for seg, imaginærdel for seg og får Kramers Kronig relasjonene.

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2(\xi)}{\xi - \omega} d\xi$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_1(\xi)}{\xi - \omega} d\xi$$

=====

P betyr "principal value" og integralene skrives oftest som  $2 \times \int_0^{\infty}$  istedenfor slik som skrevet ovenfor. Gjør vi det får vi Kramers Kronig relasjonene på formen:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\xi \varepsilon_2(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega \varepsilon_1(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi$$

Kausalitet og KK relasjonene betyr at dersom vi måler *en* av funksjonene for *alle* frekvenser så er den andre *fastlagt*.

## KLASSISK MIKROSKOPISK TEORI FOR OPTISKE EGENSKAPER

I et ikke-ledende isotropt medium er elektronene lokalisert, dvs. de er bundet til kjerner. I et ytre felt, e.g. et elektromagnetisk felt vil elektronene forskyves en distanse  $r$  fra sin likevektsposisjon. Dette resulterer i en *polarisasjon*

$$\bar{P} = -Ne\bar{r}$$

$N$  er antall elektroner pr. volumenhet. Forskyvningen  $\bar{D}$  er gitt av

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0\epsilon_r\bar{E}$$

Elektronet er i følge denne klassiske Lorentz modellen bundet til atomene med en kraftkonstant  $k$ . Bevegelsesligningen for elektronet blir derved

$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\bar{r}}{dt} + k\bar{r} = -e\bar{E} = -e\bar{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$\gamma$  er en dempningskonstant,  $m$  er elektronets masse. En løsning av denne differensialligningen er

$$\bar{r} = \frac{-e\bar{E}_0}{-m\omega^2 - im\omega\gamma + k} e^{-i\omega t}$$

og dermed blir polarisasjonen  $\bar{P}$

$$\bar{P} = \frac{Ne^2 / m}{-\omega^2 - i\omega\gamma + k / m} \bar{E}$$

$k/m = \omega_0^2$  gir:

$$\bar{P} = \frac{Ne^2 / m}{-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2} \bar{E}$$

Med  $\bar{P} = \alpha\bar{E}$  kan vi skrive

$$\bar{D} = \epsilon_0\bar{E} + \bar{P} = (\epsilon_0 + \alpha)\bar{E} = \epsilon_0\epsilon_r\bar{E}$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{\alpha}{\epsilon_0}$$

$\epsilon_r$  = dielektrisitetetskonstanten

Innsatt i ligningen ovenfor gir dette:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2 / m\epsilon_0}{-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2}$$

$Ne^2/m\epsilon_0$  har dimensjonen  $\text{sek}^{-2}$ , vi kaller den plasmafrekvensen<sup>2</sup>,  $\omega_p^2$

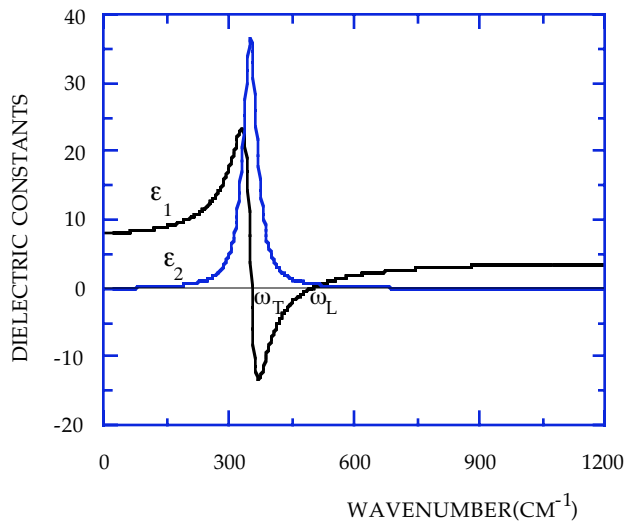
$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma - \omega_0^2} = N^2$$

$\epsilon_r = N^2$  er dielektrisitetskonstanten til systemet. Den er kompleks for et absorberende system. Skriver vi dette ut som realdel og imaginærdel får vi: ( $N = n + i\kappa$ )

$$\epsilon_1 = n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\epsilon_2 = 2n\kappa = \frac{\omega_p^2 \cdot \gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Figuren viser typisk forløp for  $\epsilon_1$  og  $\epsilon_2$

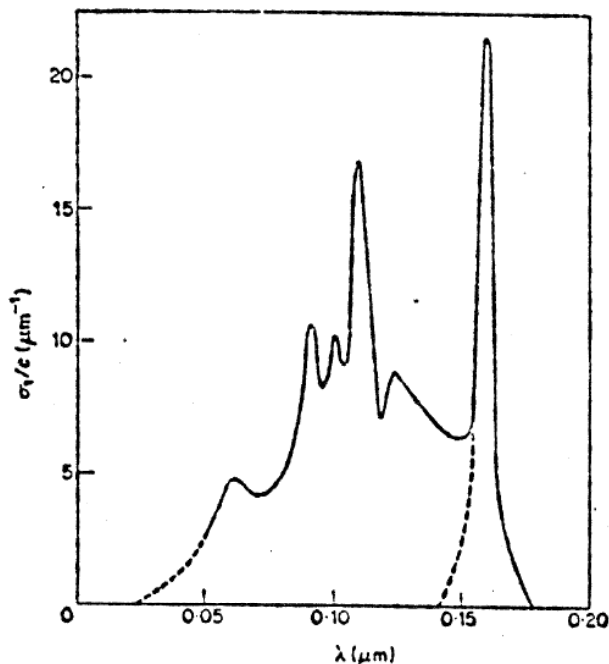


Dersom systemet har mange resonans-frekvenser skriver vi:

$$N^2 = \epsilon_r = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$$

$f_j$  kalles oscillatorstyrken.

I figuren under viser vi den målte  $\epsilon_2$ , eller rettere sagt  $\sigma \sim \epsilon_2\omega$  for en NaCl krystall. Vi kan lett se at responsen er satt sammen av flere oscillatorer.



Ett punkt er underslått hittil

$$\alpha = \frac{Ne^2 / m}{-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2}$$

er å betrakte som en "atomær" polarisibilitet. Det feltet som polariserer er det lokale feltet, ikke det ytre feltet. Se f.eks. Kittel, kap. 13. Dette gjør at  $P/E$  for en krystall må skrives som

$$P/E = \frac{N\alpha}{1 - \frac{\epsilon_0}{3}\alpha N} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon_0}$$

Dette kan betraktes som en effektiv polariserbarehet, den atomære får en korreksjon p.g.a. det lokale feltet fra de andre dipolene

$$\alpha_{eff} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\epsilon_0}{3} \alpha N}$$

Dette kan også skrives på formen (Clausius-Mosottis ligning)

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{\epsilon_0}{3} \alpha N$$

## DRUDE TEORI FOR METALLER

I metaller er elektronene fri. I den enkleste modell for responsen til et metall, settes derfor bare  $\omega_0 = 0$  i de ligningene vi har utledet. En slik teori ble først satt opp av P. DRUDE.

$$\epsilon = N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

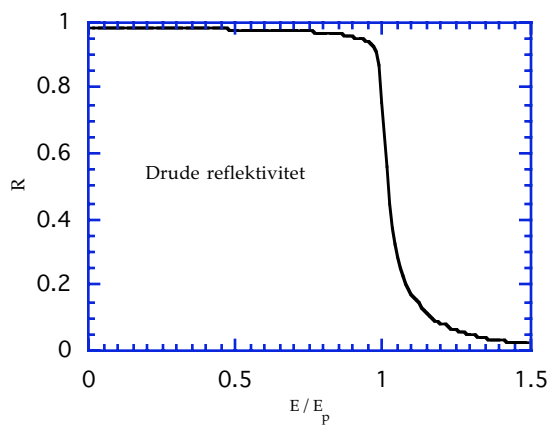
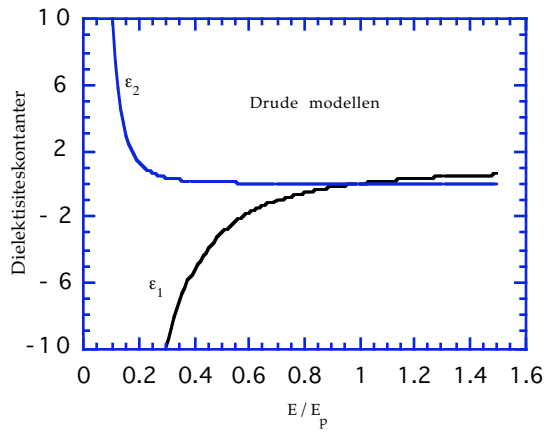
$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}$$

Realdel av  $\epsilon$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}$$

Imaginærdel av  $\epsilon$

Ut fra Maxwells ligninger kan man også vise at:  $\gamma = 1/\tau$ , der  $\tau$  er levetiden for eksitasjoner i elektrongassen, ): tiden mellom støt i elektrongassen. Etter denne modellen vil derfor optiske målinger tillate oss å bestemme tiden mellom støt i elektrongassen. Plotter vi ligningene ovenfor fås:



Den samme støt-tiden  $\tau$  inngår også i uttrykket for dc ledningsevne

$$\sigma = Ne^2\tau/m$$

Ut fra Maxwells ligninger

$$\nabla \times \bar{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{J} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{J} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

ser vi at dielektrisitetskonstanten  $\epsilon_r$  kan skrives som:

$$\epsilon_r = 1 + i\sigma/\omega\epsilon_0.$$

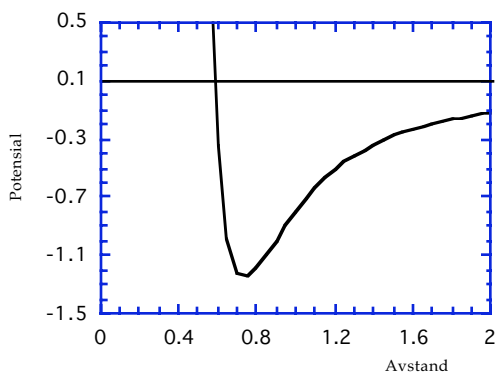
Eventuelt får vi  $\epsilon_r = \epsilon_b + i\sigma/\omega\epsilon_0$  dersom vi har både bundne og fri elektroner.

Vi får bruk for dette når vi utleder det kvantemekaniske uttrykket for  $\epsilon$ .

## 2. ORDENS PROSESSER

### ANHARMONISK POTENSIAL

Vi skal her vise at 2 harmonisk generering og sum og differanse frekvens generering følger av en klassisk oscillator modell dersom vi inkluderer ikke-harmoniske bidrag i potensialet. Vi tar utgangspunkt i en klassisk oscillator i dette potensialet der vi inkluderer et ikke harmonisk bidrag til kraften lik  $\max^2$ . Dette er tilfelle for store utsving rundt likevekt i potensialet på figuren



Anta materialet belyses samtidig av to bølger med ulike frekvenser. Bevegelsesligningen blir da:

$$m\ddot{x} + \gamma m\dot{x} + kx + \max^2 = F = qE_{\text{Tot}}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + ax^2 = \frac{q}{m} (E_1(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + E_2(e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t}))$$

Denne ligningen løses ved iterasjon idet vi kan anta at  $a$  er liten.

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} \dots$$

$$P = Nq \cdot x$$

Første ordens løsning finnes ved å sette  $a=0$

$$x^{(1)} = \sum_i x^{(1)}(\omega_i) = \sum_i \frac{q/m E_i}{\omega_0^2 - \omega_i^2 - i\omega_i\gamma} e^{\pm i\omega_i t}$$

Annen ordens løsning finnes ved å flytte  $(ax^{(1)})^2$  over på høyre side av ligningen og sette inn første ordens løsning. Det gir:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} (E_1(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + E_2(e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})) - a(x^{(1)})^2$$

Dette er som en ordinær oscillator men med en "ny" drivkraft som inneholder nye frekvenser når vi setter inn første ordens løsning på høyre side.  $ax^{(1)}$  er av formen:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \alpha_1 e^{i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-i\omega_1 t} + \alpha_3 e^{i\omega_2 t} + \alpha_4 e^{-i\omega_2 t} \\ (x^{(1)})^2 &= (\alpha_1 e^{i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-i\omega_1 t} + \alpha_3 e^{i\omega_2 t} + \alpha_4 e^{-i\omega_2 t})^2 \\ &= \alpha_1^2 e^{2i\omega_1 t} + \alpha_2^2 e^{-2i\omega_1 t} + \alpha_3^2 e^{2i\omega_2 t} + \alpha_4^2 e^{-2i\omega_2 t} \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_3 e^{i(\omega_1 + \omega_2)} + \alpha_1 \alpha_4 e^{i(\omega_1 - \omega_2)} \dots \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_2 e^{i0 \cdot t} + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = x^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) + x^{(2)}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$+ x^{(2)}(2\omega_1) + x^{(2)}(2\omega_2) + x^{(2)}(0) + \text{c.c.}$$



$$\Rightarrow x^{(2)}(\omega_1 \pm \omega_2) = \frac{2a(q/m)^2 E_1 E_2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1\gamma)(\omega_0^2 - \omega_2^2 \mp i\omega_2\gamma)}$$

$$\cdot \frac{1}{\omega_0^2 - (\omega_1 \pm \omega_2)^2 - i(\omega_1 \pm \omega_2)\gamma} \cdot e^{-i(\omega_1 \pm \omega_2)t}$$

$$x^{(2)}(2\omega_i) = \frac{-a(q/m)^2 E_i^2 \cdot e^{-2i\omega_i t}}{(\omega_0^2 - \omega_i^2 - i\omega_i\gamma)^2 (\omega_0^2 - 4\omega_i^2 - i2\omega_i\gamma)}$$

Vi ser at systemet oscillerer ikke bare på frekvensene  $\omega_1$  og  $\omega_2$ , men også på  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$ , og  $\omega_1 - \omega_2$ . Dette er mye brukt i laserforskningen for å lage lasere på nye frekvenser.