Løsningsforslag - Øving 8

Oppgave 1

De to linjeladningene $\pm\lambda$ velges parallelle med z-aksen gjennom punktene $(0, \pm y_0)$ i x,y planet. Som funksjon av x,y kan det resulterende potensialet skrives:

$$V(x,y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+(y+y_0)^2}}{r_0} - \ln\frac{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}{r_0}\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{x^2+(y+y_0)^2}{x^2+(y-y_0)^2}}$$

Ekvi-potensialflatene er gitt ved $\dfrac{x^2+(y+y_0)^2}{x^2+(y-y_0)^2} = \alpha^2$, og vi ser at $V(x,0)=0$ og at vi har $V(x,-y) = -V(x,y)$. Når V er spenningen mellom to symmetriske ekvi-potensialflater med potensialene $\pm V/2$, har vi derfor: $V/2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\alpha$, og da er kapasitansen pr. lengdeenhet i z retningen: $C' = \dfrac{\lambda}{V} = \dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\alpha}$. Vi må nå vise at disse ekvi-potensialflatene er sirkulære sylindere, og vi må uttrykke konstanten α ved hjelp av sylinderdiameteren a og avstanden d mellom sylindersenterene. Flaten på positivt potensial $+V/2$ gis av:

$$x^2+(y+y_0)^2 = \alpha^2\left(x^2+(y-y_0)^2\right), \text{ som gir}: x^2+y^2-2\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}y_0 y + y_0^2 = 0,$$

$$\text{og} \quad x^2 + \left(y - \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}y_0\right)^2 = \left(\frac{2\alpha y_0}{\alpha^2-1}\right)^2.$$

Dette er ligningen for en sirkel med sentrum i $x=0$, $y = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}y_0 = d/2$ og med radius $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-1}y_0 = a/2$, og det viser at ekvi-potensialflatene er sirkulære sylindere. Dermed har vi:

$\dfrac{\alpha^2+1}{2\alpha} = \dfrac{d}{a}$, som gir $\alpha^2 - 2\dfrac{d}{a}\alpha + 1 = 0$, med de to løsningene

$\alpha_1 = \dfrac{d}{a} + \sqrt{\left(\dfrac{d}{a}\right)^2 - 1}$ og $\alpha_2 = \dfrac{d}{a} - \sqrt{\left(\dfrac{d}{a}\right)^2 - 1}$. Men vi ser umiddelbart også at $\alpha_1\alpha_2 = 1$, og må velge den løsningen som gir $\ln\alpha > 0$, dvs., $\alpha = \alpha_1$. Direkte innsetting gir den oppgitte formelen: $C' = \dfrac{\lambda}{V} = \dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\alpha} = \pi\varepsilon \Big/ \ln\left(\dfrac{d}{a} + \sqrt{\left(\dfrac{d}{a}\right)^2 - 1}\right)$. *QED*!

Oppgave 2

a) Innsetting av de oppgitte verdiene i formelen fra Oppgave 1 gir:

$C' = 3.635\cdot10^{-11}$ F/m = <u>36.35 pF/m</u>

$L' = \mu\varepsilon/C' = 0.917\cdot10^{-6}$ H/m = 0.<u>917 µH/m</u>

Bølgehastighet: $c_0 = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} = 1/\sqrt{L'C'} =$ <u>$1.732\cdot10^8$ m/s</u>,

Bølgeimpedans: $z_0 = \sqrt{L'/C'} =$ <u>158.82 Ω</u>

b) $R' = 2r/(\pi(a/2)^2)$ = <u>43.3 mΩ/m</u> (faktor 2 fordi resistansen i de to lederne adderes).

$\nu_0 = \omega_0/(2\pi) = R'/(2\pi L')$ = <u>7.514 kHz</u>. $l = z_0/R'$ = <u>3.669 km</u>.

c) Vi har $\nu = 10$ MHz $>>$ $\nu_0 = 7.5$ kHz. Da er bølgeimpedansen rent reell og lik den for tapsfri linje funnet ovenfor. Fra lign.(4.16) og (4.17) på side 11 får vi da (f.eks. ved bruk av Matlab):
$Z_{\text{last}} = 80\ \Omega$: $\rho(l) = \underline{-0.3301}$, $Z(0) = |Z(0)| \exp(i\delta)$: $|Z(0)| = \underline{285.1\Omega}$, $\delta = \underline{19.09^{\circ}}$
$Z_{\text{last}} = 160\ \Omega$: $\rho(l) = \underline{0.0037}$, $Z(0) = |Z(0)| \exp(i\delta)$: $|Z(0)| = \underline{157.8\Omega}$, $\delta = -\underline{0.2^{\circ}}$
I det siste tilfellet har vi $Z_{\text{last}} \approx z_0$ og har nær tilpasset last med: $\rho(l) \approx 0$ and $Z(0) \approx z_0$.

Oppgave 3 3

a) Kapasitansen for bare én sylindrisk leder med diameter a og høyde h over et ledende plan er nøyaktig det dobbelte av den for to sylindriske ledere med avstand $d = 2h$ (det følger av speilingsprinsippet fordi vi nå har samme ladning som for to sylindriske ledere, men bare halve spenningen). Fra formelen i Oppgave 1 får vi da:
$C' = \underline{5.915 \text{ pF/m}}$, $L' = \mu_0\varepsilon_0/C' = \underline{1.879 \text{ mH/m}}$, $c_0 = \underline{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$,
$z_0 = \sqrt{L'/C'} = \underline{563.56\ \Omega}$.

b) $R' = \underline{21.65 \text{ m}\Omega/\text{m}}$ (det ledende jordplanet har uendelig tverrsnittsareal og null resistans). $\nu_0 = \omega_0/(2\pi) = R'/(2\pi L') = \underline{1.834 \text{ kHz}}$, $l = z_0/R' = \underline{26.036 \text{ km}}$.